Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}$; $U_{n+1} \leq V_n \leq \alpha$

*On a $\forall n \in \mathbf{N}$; $U_{n+1} \leq V_n \leq \alpha$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} U_n = \alpha$ donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} V_n = \alpha$

C - 1°/ a) $\forall x \in \mathbf{R}^*$: $F(-x) = \int_0^{\frac{1}{2}Log\frac{x^2}{1-x^2}} f(t)dt = F(x)$

donc $\forall x \in \mathbf{R}$ $(-x) \in \mathbf{R}$ et $F(-x) = F(x)$ d'où F est une fonction paire

b) * La fonction f est continue sur **R** donc la fonction

G : x a $\int_0^x f(t)dt$ est dérivable sur **R** et $\forall x \in \mathbf{R}$; $G'(x) = f(x)$

* d'autre part la fonction g : x a $g(x) = \frac{1}{2} Log \frac{x^2}{1-x^2}$ est dérivable

sur $]0,1[$ donc F est dérivable sur $]0,1[$ comme composée de deux fonctions dérivables car $F = G \circ g$.

$\forall x \in]0,1[$: $F'(x) = g'(x).G'(g(x))$ or $g'(x) = \frac{1}{x(1-x^2)}$

d'où $F'(x) = \frac{1}{x(1-x^2)}$ $f \circ g(x)$ or $g = f^{-1}$ donc $f \circ g(x) = x$ et par

suite $\forall x \in]0,1[$: $F'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

2°/ a) $F(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \int_0^0 f(t)dt = 0$

on a $\forall x \in]0,1[$: $F'(x) = \frac{1}{(1-x^2)}$ or $\frac{1}{(1-x^2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x})$

d'où $\forall x \in]0,1[$: $F(x) = \frac{1}{2}(-Log(1-x) + \log(1+x)) + c$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c$ or $F(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$ donc $c = -\frac{1}{2} Log(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}})$ d'où

$\forall x \in]0,1[$: $F(x) = \frac{1}{2} Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{2} Log(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}})$